



VİSKOZİTENİN BASINCA BAĞLI OLDUĞU AKIŞKANLARIN RİJİD TÜP İÇERİSİNDE AKIMI

İlkay Sıkdokur, Saadet Özer, Ahmet Kırış, Ali Ercengiz
İTÜ Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Mühendisliği Bölümü, İstanbul

ABSTRACT

The dependence of the viscosity of fluids on pressure has been well established by experiments. Especially, taking into consideration the dependency of pressure on viscosity in problems where there is a large variation of pressure in the flow domain become inevitable. Because of this reason, the fluids with pressure dependent viscosity, has become more popular in fluid flow problems in a wide variety of applications. Thus, it has been studied more recently. In this work we have examined the fluid flow through the cylindrical rigid tube which are expressed by various types of dependencies of pressure on viscosity. Some analytical solutions of the velocity field and the pressure, thereby the particular viscosity regimes for flows are obtained. The difference between the results of the problem and the classical incompressible Navier-Stokes flow has been discussed, and obtained results are compared to the results done in other works in the literature.

ÖZET

Viskozitenin basınca bağlı olduğu akışkanlar, deneysel çalışmalarda çokça belirlenmiştir. Özellikle akış alanlarında büyük basınç değişimleri söz konusu olduğu hallerde viskozitenin basınca bağlı olduğu modelleri ele almak reel problemler açısından kaçınılmaz hale gelmiştir. Bu nedenle, viskozitenin basınca bağlı olduğu akışkanlar çok çeşitli uygulama alanlarında, daha popüler akım problemleri haline gelmiştir. Dolayısı ile son yılların akışkanlar mekaniği problemlerinde sıklıkla çalışılmıştır. Bu çalışmada, silindirik rijid tüp boyunca, viskozitenin basınca değişik bağıllığı ile ifade edilen akım problemleri ele alınmıştır. Akımlar için, hız alanı, basınç ve dolayısı ile özel viskozite rejimlerinin bazı analitik çözümleri değişik yöntemlerle elde edilmiştir. Elde edilen sonuçların akışkanın sabit viskoziteye sahip olduğu klasik sıkışmaz Navier-Stokes akışlarından farklılıkları tartışılmış, literatürde yapılan çalışmalarda elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

GİRİŞ

Bu çalışmada viskozitenin basınca bağlı olduğu akışkan modelinin genel alan denklemleri elde edilmiş ve rijid silindirik tüp içerisinde akım problemi ele alınmıştır.

Klasik akışkanlar mekaniğinde gerilme ifadesi

$$\mathbf{t} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{d} \quad (1)$$

ile verilmektedir. Burada \mathbf{t} gerilme tansörünü, p basınç fonksiyonunu, \mathbf{d} şekil değiştirme hızı tansörünü göstermektedir. (1) denkleminde görüldüğü üzere gerilme ile hız gradyanları orantılıdır. Direncin (gerilmeler), hız gradyanına oranı μ ile gösterilmekte ve viskozite olarak isimlendirilmektedir. Bu direnç, komşu akışkan tabakalarının harekete karşı göstermiş olduğu

dirençtir. Normal gerilmeler büyüdükçe direnç de büyüyecektir. Buradan hareketle viskozitenin normal gerilmeye dik olacağını ilk olarak Stokes [1] ortaya atmıştır.

Katıların ve akışkanların yüksek basınç altında davranışlarını sistematik biçimde inceleyen araştırmalar 1930'dan sonra yapılmıştır [2]. Bridman [3] çalışmasında 43 farklı akışkan üzerinde deneyler yaparak,

$$\mu = A\rho^{\frac{1}{2}} \exp\left(\left(\rho + \rho^2 r\right) \frac{S}{\theta}\right) \quad (2)$$

biçiminde bir bağıllık elde etmiştir. Burada A , r ve S sabitler, ρ yoğunluk ve θ sıcaklığı göstermektedir. Barus [4] ise

$$\mu(p) = \mu_0 \exp(\beta p) \quad (3)$$

ilişisini önermiştir. Sonraki süreçte, bu ilişki deneysel olarak bir çok çalışmada gözlenmiştir. Burada β , $(Pa)^{-1}$ boyutunda bir sabittir. Viskozitenin basınca bağıllığı üstel alınarak, akışkanın büyük basınçlara maruz kaldığı hidrolik taşıyıcıların yataklarında akım Bair [5], Szeri [6] ve Schaeffer [7] tarafından incelenmiştir. Sıkışmaz ve Newtonyen akışkanlar için viskozitenin basınca bağlı olma durumunun matematiksel analizi Renardy [8] ve Gazzola [9] tarafından yapılmıştır. Bu çalışmalarda sıkışmaz ve Newtonian akışkan varsayımı ile oluşturulan modelin çözümlerinin varlığı ve tekliği tartışılmıştır.

Bair ve arkadaşları [4] sıkışmaz ve Newtonian akışkanın tek yönlü akımında viskozitenin üstel olması durumunda çözümün olmadığını göstermişler ve ancak viskozitenin basınca lineer bağlı olduğu durumda çözüm elde edebilmişlerdir. Hron [10], Vasudevaiah [11] paralel plaklar arasında ve silindirik tüp içinde viskozitenin basınca bağlı olduğu çeşitli durumlar için akımı incelemişler ve üstel bağıllık durumunda paralel levhalarda çözümün olmadığını göstermişlerdir. Ayrıca hız profillerinin Navier-Stokes modelinden (viskozite sabit) oldukça farklı olduğunu, parabolik yapıdan bir yatık "V" harfine dönüştüğünü göstermişlerdir. Silindirik tüp içinde akım için lineer ve üstel viskozite basınç bağıllığı durumunda çözümleri elde etmişlerdir. Malek v.d. [12] tarafından üç boyutlu periyodik akımlarda viskozite-basınç ilişkisi göz önünde tutularak periyodik çözümler elde edilmiştir.

Son yıllarda Rajagopal ve arkadaşları [13-19] viskozite basınç bağıllığını göz önüne alarak birçok problemi ayrıntılı olarak incelemişlerdir. Renardy [20], viskozitenin basınca bağıllığının lineer olması durumunda herhangi kesitli bir tüpte paralel akımın oluşabileceğini göstermiş ve ayrıca basınca bağıllığın üstel olması durumunda dairesel kesitli tüpte hızın yarıçapa bağıllığının kuadratik yapıda olması gerektiği sonucunu elde etmiştir.

Bu çalışmada viskozitenin basınca bağıllığının

$$\mu = \alpha p, \quad \mu = \mu_0 (1 + \varepsilon p), \quad \mu = \mu_0 \exp(\varepsilon p), \quad (4)$$

şeklinde üç farklı fonksiyon yapısında olduğu varsayılmıştır. Alan denklemleri viskozitenin özel bağıllıkları ve koordinat takımından bağımsız olarak elde edildikten sonra, dairesel kesitli rijid silindir içinde akım problemi ele alınmıştır. Elde edilen sonuçların akışkanın sabit viskoziteye sahip olduğu klasik sıkışmaz Navier-Stokes akışlarından farklılıkları tartışılmıştır.

ALAN DENKLEMLERİ

Viskozitenin basınca bağlı olduğu akışkanlar için gerilme tansörü (1) denkleminde olduğu gibi verilir. Burada hız gradyanı tansörü $\mathbf{d} = \nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T$ olarak tanımlanmıştır ve viskozite $\mu = \mu(p)$ dir. Lineer momentumun korunumu

$$\nabla \cdot \mathbf{t} + \rho \mathbf{f} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad (5)$$

denkleminde, (1) ile verilen gerilme tansörü ifadesi kullanılırsa, akışkanın alan denklemleri

$$-\nabla p + \frac{\partial \mu}{\partial p} \nabla p (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) + \mu (\Delta \mathbf{v} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v})) + \rho \mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v})^T \mathbf{v} \quad (6)$$

şeklinde elde edilir. (6) denklemlerini boyutsuz formda yazabilmek için

$$\mathbf{v}^* = \frac{\mathbf{v}}{U}, \quad p^* = \frac{p}{\rho U^2}, \quad t^* = \frac{tU}{L}, \quad \mu^* = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad \mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad (7)$$

büyüklikleri tanımlanırsa, alan denklemleri boyutsuz halde,

$$-\nabla^* p^* + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial \mu^*}{\partial p^*} \nabla^* p^* (\nabla^* \mathbf{v}^* + \nabla^* \mathbf{v}^{*T}) + \mu^* \Delta^* \mathbf{v}^* \right] = \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + (\nabla^* \mathbf{v}^{*T}) \mathbf{v}^*, \quad (8)$$

şeklinde elde edilir. Burada L , U , μ_0 ve Re sırasıyla karakteristik boy, hız, viskozite ve Reynolds sayısını $\left(Re = \frac{\rho UL}{\mu_0} \right)$ temsil etmektedir, ayrıca akışkanın sıkışmaz olduğu ve kütle kuvvetlerinin olmadığı varsayılmıştır.

SİLİNDİRİK TÜP İÇERİSİNDE AKIM

Burada silindirik rijid tüp boyunca akım problemi, viskozitenin basınca bağlılığının (4) denklemi ile verildiği durumlar için incelenmiştir. Her üç durum için de hız alanının sadece radyal koordinata bağlı eksenel bileşeninin olduğu ve basınç fonksiyonunun ise hem radyal hem de eksenel koordinatlara bağlı olduğu,

$$\mathbf{v} = (0, 0, w(r)), \quad p = p(r, z) \quad (9)$$

varsayımı yapılmıştır. Buradan itibaren boyutsuzlaştırılmış büyüklikleri ifade eden "*" notasyonu yazım kolaylığı açısından kullanılmayacaktır.

i. $\mu = \alpha p$ durumu:

Bu durumda, (8) denklemlerinden

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\alpha}{Re} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \frac{dw}{dr} \right) &= 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\alpha}{Re} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \frac{dw}{dr} + p \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \right) &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

elde edilir. Sınır koşulları ise $w(0) = w(1) = 0$ ile verilir. Burada bu iki denklem arasında $\frac{\partial p}{\partial r}$

yok edilir ve $\lambda = \frac{\alpha}{Re}$ tanımı yapılırsa;

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \lambda \left(\frac{w'' + \frac{1}{r} w'}{\lambda^2 (w')^2 - 1} \right) p = 0 \quad (11)$$

sonucuna ulaşılır. Bu denklem,

$$\frac{\partial p}{\partial z} = - \left(\frac{w'' + \frac{1}{r} w'}{\lambda^2 (w')^2 - 1} \right) = -\bar{\beta}(r) \quad (12)$$

şeklinde yazılabilir. (12) denkleminin çözümünden;

$$p(r, z) = g(r) e^{-\lambda \bar{\beta}(r) z}, \quad p(0, 0) = g(0) \quad (13)$$

elde edilir. Ayrıca yine (12) denkleminde $w' = u$ ataması yapılırsa, ikinci eşitlikten;

$$u'(r) + \frac{1}{r} u(r) = -(1 - \lambda^2 u^2(r)) \bar{\beta}(r) \quad (14)$$

bulunur. Bu denklem $\bar{\beta}(r) = \beta = \text{sabit}$ için

$$u(r) = \frac{i (J_1(i \beta \lambda r) - C_1 Y_1(-i \beta \lambda r))}{\lambda (J_0(i \beta \lambda r) + C_1 Y_0(-i \beta \lambda r))} \quad (15)$$

çözümüne ulaşılır. Burada $r \rightarrow 0$ için, $Y_1 \rightarrow \mp \infty$ olduğundan $C_1 = 0$ alınmalıdır, dolayısıyla

$$u(r) = \frac{i J_1(i \beta \lambda r)}{\lambda J_0(i \beta \lambda r)} \quad (16)$$

olarak bulunur. Sonuç olarak, $w(r)$ hız bileşeni için,

$$w(r) = \frac{1}{\beta \lambda^2} \ln \left(\frac{C_2}{J_0(i \beta \lambda r)} \right) \quad (17)$$

elde edilir. $w(1) = 0$ sınır koşulundan,

$$C_2 = J_0(i \beta \lambda) \quad (18)$$

ve dolayısıyla

$$w(r) = \frac{1}{\beta \lambda^2} \ln \left(\frac{J_0(i \beta \lambda)}{J_0(i \beta \lambda r)} \right) \quad (19)$$

dir. Diğer yandan, (13) ile verilen basınç fonksiyonu bu durumda,

$$p(r, z) = g(r) e^{-\lambda \beta z} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{dg}{dr} e^{-\lambda \beta z} \quad (20)$$

ifadeleri (10) denklemlerinin ilkinde yerine yazılır ve (16) sonucu da kullanılırsa;

$$\frac{dg}{dr} + \lambda \beta \frac{i J_1(i \beta \lambda r)}{J_0(i \beta \lambda r)} g(r) = 0 \quad (21)$$

bulunur ki, bu denklemin çözümü $g(0) = p_0$ sınır koşulu ile birlikte

$$g(r) = p_0 J_0(i \beta \lambda r) \quad (22)$$

olur ve sonuç olarak basınç

$$p(r, z) = p_0 J_0(i \lambda \beta r) e^{-\lambda \beta z} \quad (23)$$

şeklinde elde edilir.

ii. $\mu = \mu_0 (1 + \varepsilon p)$ durumu:

Bu durum için, (8) denklemlerinden

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu_0}{Re} \varepsilon \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dw}{dr} &= 0, \\ -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left(\varepsilon \mu_0 \frac{\partial p}{\partial r} \frac{dw}{dr} + \mu_0 (1 + \varepsilon p) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right) &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

denklemlerine ulaşılır. Burada iki denklem arasından $\frac{\partial p}{\partial r}$ yok edilirse,

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial z}}{1 + \varepsilon p} = \frac{\lambda \left(w'' + \frac{1}{r} w' \right)}{1 - \varepsilon^2 \lambda^2 (w')^2} \quad (25)$$

bulunur. Bu denklemin birinci durumda elde edilen (12) denklemin benzerliğine ve yine sağ tarafın r nin bir fonksiyonu $\bar{\beta}(r)$ şeklinde yazılabileceğine dikkat edilirse, çözüm (17) denklemin benzer şekilde $\bar{\beta}(r) = \beta = \text{sabit}$ için,

$$w(r) = -\frac{1}{\varepsilon^2 \beta \lambda} \ln(C_4 J_0(i \varepsilon \beta r)) \quad (26)$$

bulunur. Sınır şartlarından $w(1) = 0$ nedeniyle,

$$C_4 = \frac{1}{J_0(i \varepsilon \beta)} \quad (27)$$

olarak belirlenir. Bu halde

$$w(r) = \frac{1}{\varepsilon^2 \beta \lambda} \ln \left(\frac{J_0(i \varepsilon \beta)}{J_0(i \varepsilon \beta r)} \right) \quad (28)$$

dir. Basınç ise (25) denkleminde,

$$\frac{1}{\varepsilon} \ln |1 + \varepsilon p| = -\beta z + \ln \bar{g}(r) \quad (29)$$

yardımla

$$p = \frac{1}{\varepsilon} (\bar{g}(r) e^{-\varepsilon \beta z} - 1) \quad (30)$$

bulunur. Sınır koşulu $p(0,0) = p_0$ koşulu altında $p_0 = \frac{1}{\varepsilon} (\bar{g}(0) - 1)$ nedeniyle,

$$\bar{g}(0) = \varepsilon p_0 + 1 \quad (31)$$

belirlenir. (30) ve (28) denklemlerinden elde edilen basınç ve hız bileşenleri (24) denklemlerinin ilkinde yerine yazılırsa,

$$\frac{\bar{g}'(r)}{\bar{g}(r)} = -i \varepsilon \frac{J_1(i \varepsilon \beta r)}{J_0(i \varepsilon \beta r)} \quad (32)$$

denkleminde ulaşılır ki, çözüm (31) sınır şartıyla birlikte

$$\bar{g}(r) = (1 + \varepsilon p_0) J_0(i \varepsilon \beta r)^\beta \quad (33)$$

ile verilir. Sonuç olarak basınç

$$p = \frac{1}{\varepsilon} \left((1 + \varepsilon p_0) J_0(i \varepsilon \beta r)^\beta e^{-\varepsilon \beta z} - 1 \right) \quad (34)$$

bulunur.

iii. $\mu = \mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumu:

Benzer şekilde (8) denklemlerinden,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu_0}{Re} \varepsilon e^{\varepsilon p} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dw}{dr} &= 0, \\ -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu_0}{Re} \varepsilon e^{\varepsilon p} \frac{\partial p}{\partial r} \frac{dw}{dr} + \frac{\mu_0}{Re} e^{\varepsilon p} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (35)$$

denklemlerine ulaşılır. Burada $w(r) = \frac{1}{2} \gamma (1 - r^2)$ olduğu kabul edilir ve $p(r, z) = \frac{1}{\varepsilon} \ln \psi(r, z)$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \psi_r &= -\lambda \gamma \varepsilon r \psi \psi_z \\ \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\psi} \psi_z + \lambda \gamma r \psi_r + 2\lambda \gamma \psi &= 0 \end{aligned} \quad (36)$$

bulunur, burada birinci denklem ikinci denklemde kullanılarak,

$$\psi_z (1 - \lambda^2 \gamma^2 r^2 \varepsilon^2 \psi^2) + 2 \gamma \lambda \varepsilon \psi^2 = 0 \quad (37)$$

sonucuna ulaşılır. $\alpha = \gamma \lambda \varepsilon$ kısaltması ile çözüm

$$\psi(r, z) = \frac{2\alpha z + h(r) - \sqrt{(2\alpha z + h(r))^2 - 4\alpha^2 r^2}}{2\alpha^2 r^2} \quad (38)$$

şeklinde bulunur. Bu sonuç, (36) denklemlerinin ilkinde yani

$$\psi_r + \alpha r \psi \psi_z = 0 \quad (39)$$

denkleminde kullanıldığında,

$$\psi(r, z) = \frac{2\alpha z + h(r) + \sqrt{(2\alpha z + h(r))^2 - 4\alpha^2 r^2}}{2\alpha^2 r^2 \sqrt{2\alpha z + (2\alpha z + h(r))^2}} h'(r) = 0 \quad (40)$$

bulunur. Bu durum ancak $h'(r) = 0$ için sağlanır ki, (38) den,

$$\psi(r, z) = \frac{2\alpha z + C_1 - \sqrt{(2\alpha z + C_1)^2 - 4\alpha^2 r^2}}{2\alpha^2 r^2} \quad (41)$$

elde edilir. $p(0,0) = 0$ koşulu $\psi(0,0) = 1$ koşuluna karşı gelir. Diğer sınır koşulundan $w(r=1) = 0$ ve $p(r=1, z=0) = 0$ dan ise, $\psi(1,0) = 1$ elde edilmelidir. Dolayısıyla her iki sınır koşulundan, $C_1 = \alpha^2$ bulunur ve sonuç olarak (41) denklemi

$$\psi(r, z) = \frac{\alpha + 2z - \sqrt{(\alpha + 2z)^2 - 4r^2}}{2\alpha r^2} \quad (42)$$

halini alır ve yapılan kısaltmalar ve atamalar yerine konularak,

$$p(r, z) = \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{\gamma \frac{\mu_0}{Re} \varepsilon + 2z - \sqrt{\left(\gamma \frac{\mu_0}{Re} \varepsilon + 2z\right)^2 - 4r^2}}{2\gamma \frac{\mu_0}{Re} \varepsilon r^2} \quad (43)$$

elde edilir.

SONUÇLAR

İlk iki durum için basınç ve hızın parametrelerin belli değerleri için tüp yarıçapı r ile değişimleri aşağıdaki grafiklerde gösterilmiştir.

Şekil 1-2(a,b) de birinci durumda basınç ve hızın β nın artan değerleri ile arttığı görülmektedir. Hız değerleri beklendiği gibi her iki durumda da β nın büyük değerlerinde daha büyük olmakta olup hız profilleri yatık V harfine dönüşmektedir. Şekil 3(a,b) de farklı λ değerleri için basınç ve hızın r ile değişimi gösterilmiştir. Basınç λ nın artan değerleri ile artarken hız λ nın azalan değerleri ile artmaktadır.

Şekil 4-5(a,b) ikinci durum için basınç ve hızın farklı β değerleri için r ile değişimleri gösterilmiştir. Değişimler ilk duruma benzer olmakla birlikte, birinci durumun tersine hızın β ile değişimi daha büyük olmaktadır. Şekil 3(a,b) den basıncın ε nun artan değerleri ile arttığı hızın ise azalan değerleri ile arttığı görülmektedir.

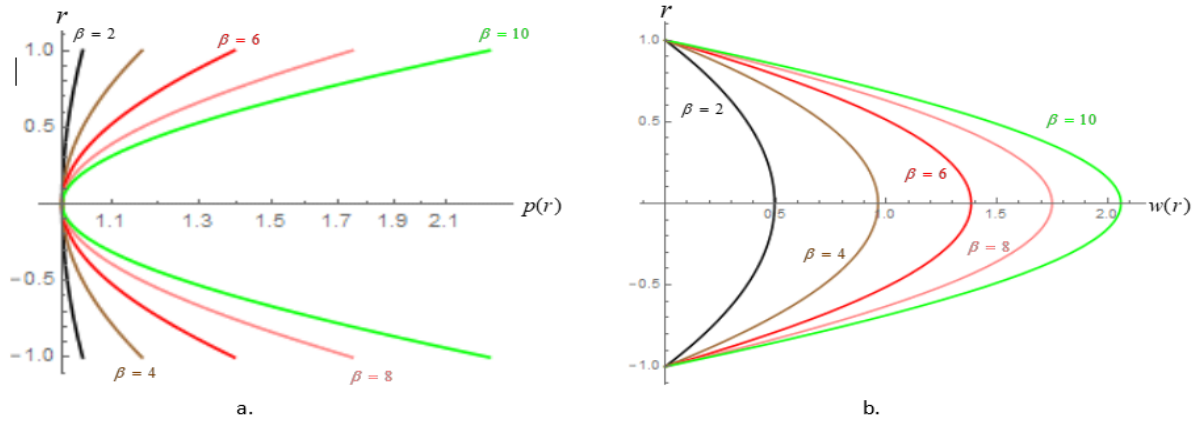


Fig.1 $\mu = \alpha p$, $\lambda = 0.2$, $z = 0$

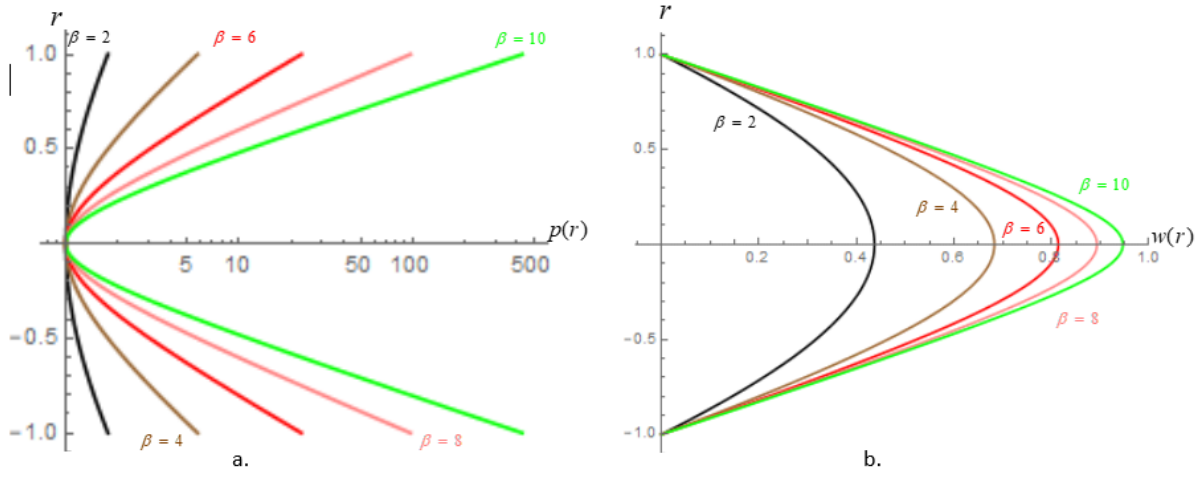


Fig.2 $\mu = \alpha p$, $\lambda = 0.8$, $z = 0$

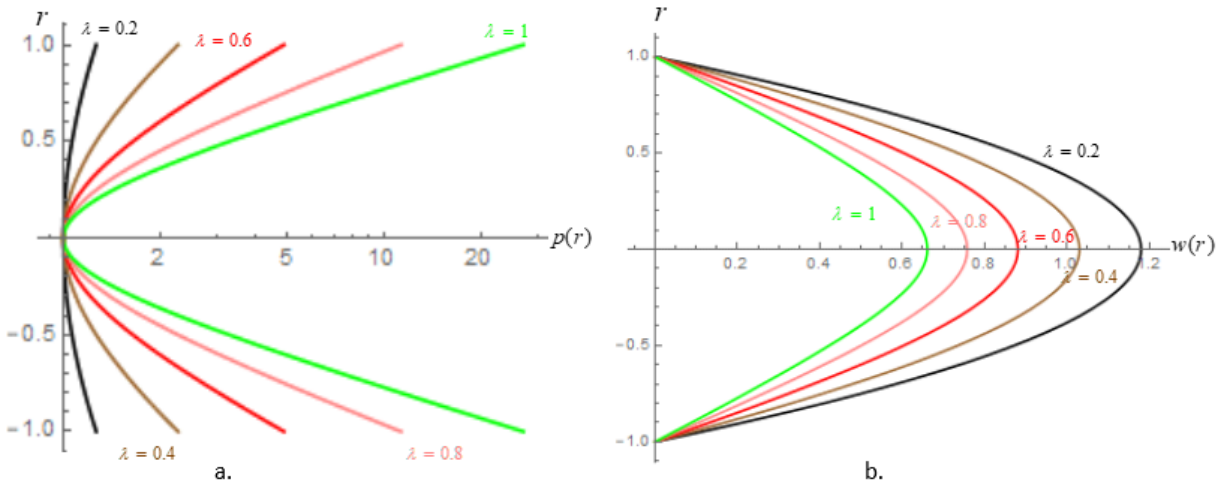


Fig.3 $\mu = \alpha p$, $\beta = 5$, $z = 0$

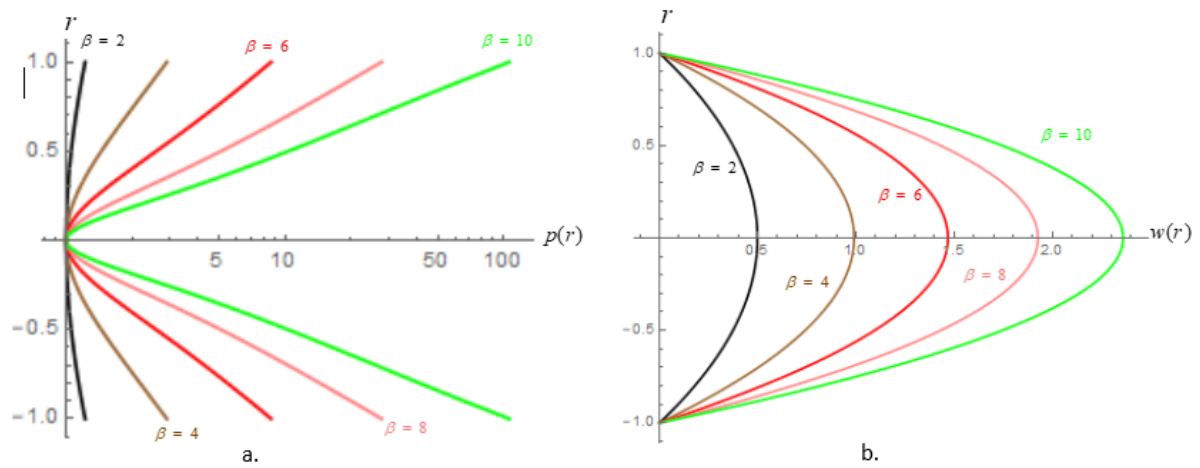


Fig.4 $\mu = \mu_0(1 + \varepsilon p)$, $\varepsilon = 0.1$, $z = 0$, $p_0 = 1$, $\lambda = 1$.

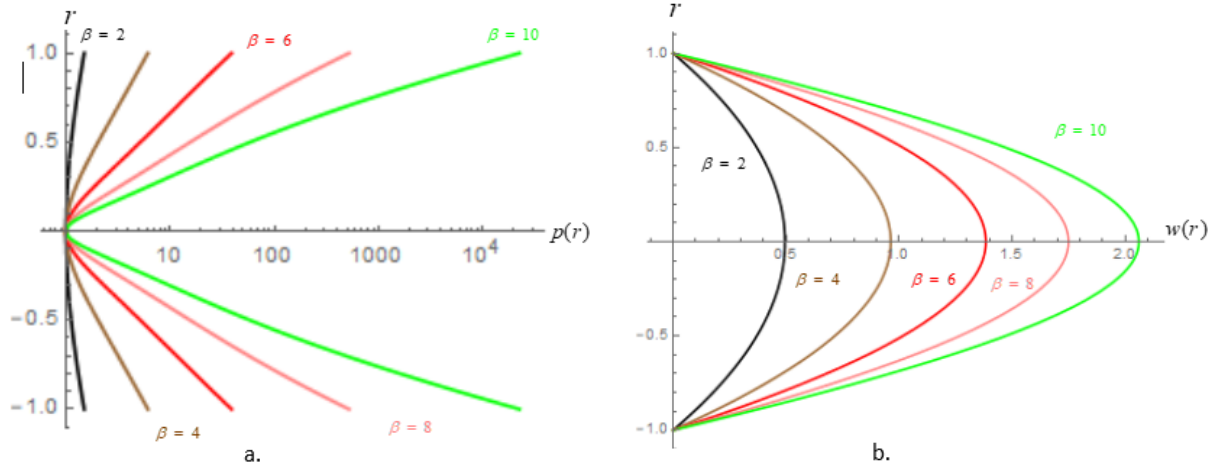


Fig.5 $\mu = \mu_0(1 + \varepsilon p)$, $\varepsilon = 0.2$, $z = 0$, $p_0 = 1$, $\lambda = 1$.

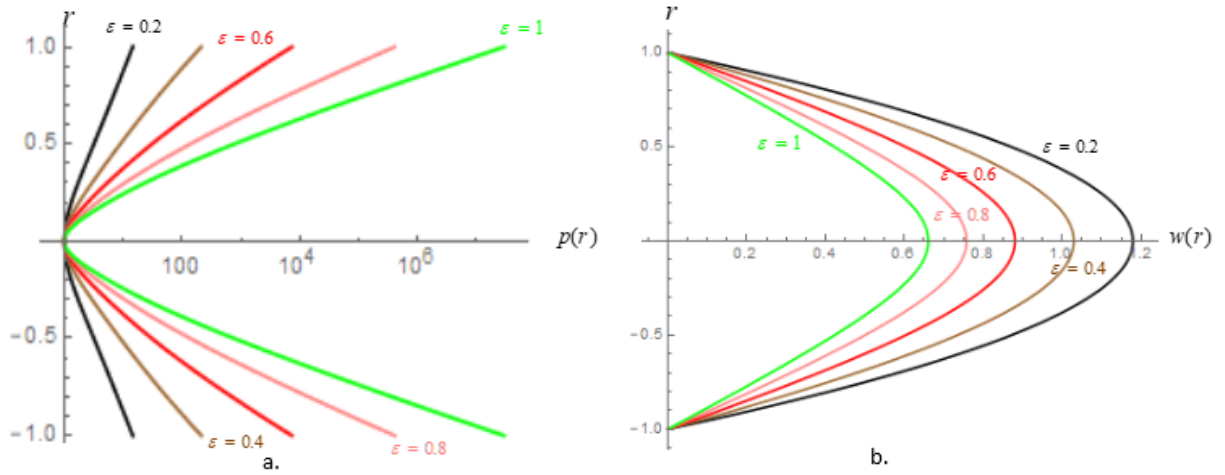


Fig.6 $\mu = \mu_0(1 + \varepsilon p)$, $\beta = 5$, $z = 0$, $p_0 = 1$, $\lambda = 1$.

KAYNAKLAR

- [1] G. G. Stokes, On the theories of the internal friction of fluids in motion and of the equilibrium motion of solids, *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, 8, (1845), 287-305.
- [2] P. W. Bridgman, *The physics of high pressure*, Mac Millan, 1931.
- [3] P. W. Bridgman, The effect of pressure on the viscosity of forty-three pure liquids, *Proc. Am. Acad.*, 61, (1926), 57-99. doi: 10.2307/20026138
- [4] C. Barus, Isotherms, isopiestic and isometrics relative to viscosity, *American Journal of Science.*, 45, (1893), 87-96. doi: 10.2475/ajs.s3-45.266.87
- [5] S. Bair, M. Khosari, W. O. Winer, High pressure rheology of lubricants and limitations of the Reynold equation, *Tribal. Int.*, 31, (1998), 573-586. doi: 10.1016/S0301-679X(98)00078-4
- [6] A. Z. Szeri, *Fluid film lubrication: theory and design*, Cambridge University Press, 1998. doi: 10.1016/s0301-679x(99)00053-5
- [7] D. G. Schaeffer, Instability in the evaluations describing incompressible granular flow, *J. Diff. Eqns.*, 66, (1987), 19-50. doi: 10.1016/0022-0396(87)90038-6

- [8] M. Renardy, Some remarks on the Navier-Stokes equations with a pressure-dependent viscosity, *Commun. PDEs.*, 11, (1986), 779-793. doi: 10.1080/03605308608820445
- [9] F. Gazzola, A note on the evolution of Navier-Stokes equations with a pressure-dependent viscosity, *Z. Angew. Math. Phys.*, 48, (1997), 760-773. doi: 10.1007/s000330050063
- [10] J. Hron, J. Malek, K. R. Rajagopal, Simple Flows of fluids with pressure-dependent viscosities, *Proceedings of the Royal Society London A: Mathematical Physical and Engineering Science.*, 457, (2001), 1603-1622. doi: 10.1098/rspa.2000.0723
- [11] M. Vasudevaiah, K. R. Rajagopal, On fully developed flows of fluids with a pressure dependent viscosity in a pipe, *Application of Mathematics.*, 4, (2005), 341-353. doi: 10.1007/s10492-005-0027-x
- [12] J. Malek, J. Necas, K. R. Rajagopal, Global analysis of flows of fluids with pressure-dependent viscosities, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 165, (2002), 243-249. doi: 10.1007/s00205-002-0219-4
- [13] S. C. Prasad, K. R. Rajagopal, Flow of fluid with pressure dependent viscosity due to a boundary that is being stretched. *Appl. Math. Comp.*, 173, (2008), 50-68. doi: 10.1016/j.amc.2005.02.043
- [14] K. R. Rajagopal, On implicit constitutive theories for fluids, *J. Fluid Mech.*, 550, (2008), 243-249. doi: 10.1017/s0022112005008025
- [15] K. R. Rajagopal, A semi inverse problem of flows of fluids with pressure dependent viscosities, *Inverse Probl. Sci. Eng.*, 16, (2008), 269-280. doi: 10.1080/17415970701529205
- [16] K. R. Rajagopal, G. Saccomandi, Unsteady exact solutions for flows of fluids with pressure-dependent viscosities, *Math. Proc. R.Irish. Acad.*, 106A(2), (2005), 115-130. doi: 10.3318/pria.2006.106.2.115
- [17] K. R. Rajagopal, G. Saccomandi, L. Vergari, On the Oberbeck-Boussinesq approximation in fluids with pressure-dependent viscosities, *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 10(2), (2009), 1139-1150. doi: 10.1016/j.nonrwa.2007.12.003
- [18] S. C. Subramanian, K. R. Rajagopal, A note on the flows through porous solids at high pressure, *Computers & Mathematics with Appl.*, 53, (2007), 260-275. doi: 10.1016/j.camwa.2006.02.023
- [19] S. Srinivasan, K. R. Rajagopal, A note on the flows of fluid with pressure-dependent viscosities in the annulus of two infinitely long coaxial cylinders, *App. Math. Modl.*, 34, (2010), 3255-3263. doi: 10.1016/j.apm.2010.02.017
- [20] M. Renardy, Parallel shear flows of fluids with a pressure-dependent viscosity, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 114, (2003), 279-286. doi: 10.1016/s0377-0257(03)00154-x